

SEMIGRUPOS REGULARES PRINCIPALMENTE ORDENADOS

SUMÁRIO

O objectivo desta dissertação é estudar a classe dos semigrupos regulares principalmente ordenados.

Esta tese é composta por três capítulos: o primeiro capítulo é de generalidades, o segundo é sobre os semigrupos regulares principalmente ordenados e o terceiro sobre os semigrupos regulares residuados.

No primeiro capítulo, apresentamos os conceitos básicos e resultados que entendemos serem fundamentais à compreensão dos restantes capítulos desta dissertação. Optamos por não apresentar as demonstrações dos resultados, pois podem ser encontradas em qualquer livro básico da Teoria de Semigrupos.

No segundo capítulo, estudamos uma subclasse da classe dos semigrupos regulares ordenados: os semigrupos regulares principalmente ordenados.

Um semigrupo regular ordenado S diz-se principalmente ordenado se para todo o $x \in S$ existe máximo do conjunto $\{y \in S : xyx \leq x\}$. Esse elemento máximo é representado por x^* . Listamos e demonstramos uma série de propriedades satisfeitas por esta classe de semigrupos. São também apresentados alguns exemplos de semigrupos regulares principalmente ordenados.

Um conceito ligado aos semigrupos regulares principalmente ordenados é o conceito de função antítona. Os semigrupos regulares principalmente ordenados nos quais a aplicação $x \mapsto x^*$ é antítona, i.e., $x^* \geq y^*$ sempre que $x \leq y$, satisfazem propriedades interessantes cujos enunciados e demonstrações são

apresentados.

Outro conceito explorado neste trabalho é o de inverso máximo de um elemento. Dado um semigrupo regular S , chama-se inverso de $x \in S$ a um elemento $x' \in S$ tal que $x = xx'x$ e $x' = x'xx'$. Se o semigrupo regular é ordenado, pode existir o maior dos inversos de x , que representamos por x° . Num semigrupo principalmente ordenado S , nem sempre $x^\circ = x^*$, para todo o $x \in S$. Caso isto aconteça, dizemos que o semigrupo é compacto. Finalizamos o segundo capítulo apresentando uma caracterização de um semigrupo S regular principalmente e naturalmente ordenado compacto.

No último capítulo são estudados os semigrupos residuados. Iniciamos este terceiro capítulo com a definição de semigrupo residuado e apresentamos algumas propriedades satisfeitas por estes semigrupos. Em particular, estudamos uma classe de semigrupos residuados: os semigrupos regulares residuados. Fazendo a ponte com o segundo capítulo, estudamos o subsemigrupo $S^\circ = \{x^\circ : x \in S\}$ de um semigrupo regular residuado. Este capítulo segue com a definição de elemento conciso e com a caracterização do conjunto dos elementos concisos de um semigrupo regular residuado. De seguida, definimos semigrupo conciso e apresentamos teoremas que o caracteriza. Finalizamos o trabalho caracterizando os semigrupos que são simultaneamente concisos e compactos.

PRINCIPALLY ORDERED REGULAR SEMIGROUPS

SUMMARY

The main purpose of this dissertation consists on studying the class of principally ordered regular semigroups.

This thesis is made up of three chapters: the first one deals with general purpose considerations, the second is on principally ordered semigroups and the third on residuated regular semigroups.

On the first chapter we present the basic concepts and results that we understand to be basic in the understanding of the remaining chapters of this thesis. We opted not to present the proofs of the results as they can be found in any basic level textbook of the Theory of Semigroups.

On chapter two we study an ordered regular semigroups subclass: the principally ordered regular semigroups. A regular ordered semigroup S is said to be principally ordered if, for every $x \in S$, there exists the biggest element of the set $\{y \in S : xyx \leq x\}$. This biggest element is represented by x^* . We describe and prove several properties satisfied by this class of semigroups. We also present some examples of principally ordered regular semigroups.

A concept connected to principally ordered regular semigroups is the concept of antitone mapping. The principally ordered regular semigroups in

which the mapping $x \mapsto x^*$ is antitone, that is, $x^* \geq y^*$ whenever $x \leq y$, satisfy interesting properties. We present these properties together with their proofs.

Another concept explored in this work is the concept of biggest inverse. Given a regular semigroup S , we say that $x' \in S$ is an inverse of $x \in S$ if $x = xx'x$ and $x' = x'xx'$. If the regular semigroup is ordered, it may exist the biggest inverse of x , which we represent by x° .

In a principally ordered semigroup S , not always $x^\circ = x^*$, for all $x \in S$. If this is the case, we say that the semigroup is compact.

We end the second chapter by presenting a characterization of a compact regular principally and naturally ordered semigroup.

In the last chapter the residuated semigroups are studied. This chapter starts with a definition of residuated semigroup and follows with the presentation of the properties of these semigroups. In particular, we study one class of residuated semigroups: the residuated regular semigroups. Linking this with the second chapter, we study the sub-semigroup $S^\circ = \{x^\circ : x \in S\}$ of a regular residuated semigroup. This chapter follows with the definition of a concise element and the characterization of the set of concise elements in a residuated regular semigroup. Then, we define the concise semigroup and we present the theorems that characterize it. We finish this chapter by characterizing the semigroups that are simultaneously concise and compact.